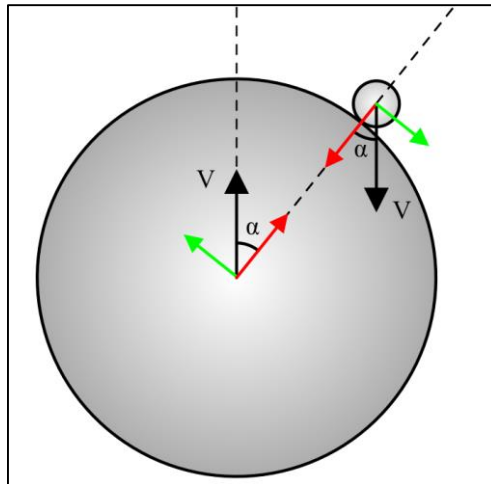


O ponto central do problema está em determinar a distância l em função do ângulo α de modo que se possa maximizá-la em função desse parâmetro. Para isso note que instantaneamente antes da esfera B encontrar o solo ambas as esferas A e B possuem velocidade dirigida para baixo de intensidade calculada por conservação da energia:

$$\frac{mv^2}{2} = mgh \Rightarrow v = \sqrt{2gh}$$

Entretanto, instantaneamente após a esfera B tocar o solo, sua velocidade vertical é invertida devido ao choque elástico sofrido o que resulta na situação intermediária a seguir:



A velocidade relativa de aproximação é dada pela soma das velocidades na direção que liga as duas esferas:

$$v_{AP} = v \cos \alpha + v \cos \alpha = 2v \cos \alpha$$

O coeficiente de restituição no choque elástico é 1:

$$e = \frac{v_{AF}}{v_{AP}} \Rightarrow v_{AF} = 2v \cos \alpha$$

A velocidade afastamento é dada por: $v_{AF} = v_A - v_B$:

$$v_A - v_B = 2v \cos \alpha \Rightarrow v_B = v_A - 2v \cos \alpha$$

Assim, a conservação da quantidade de movimento na direção da colisão fornece:

$$\begin{cases} P_i = m_B v \cos \alpha - m_A v \cos \alpha \\ P_f = m_B v_B + m_A v_A \end{cases}$$

$$m_B v \cos \alpha - m_A v \cos \alpha = m_B v_B + m_A v_A$$

Substituindo o valor da velocidade da esfera B:

$$m_B v \cos \alpha - m_A v \cos \alpha = m_B (v_A - 2v \cos \alpha) + m_A v_A$$

$$m_B v \cos \alpha - m_A v \cos \alpha = m_B v_A - 2m_B v \cos \alpha + m_A v_A$$

$$v_A = \frac{3m_B - m_A}{m_B + m_A} v \cos \alpha$$

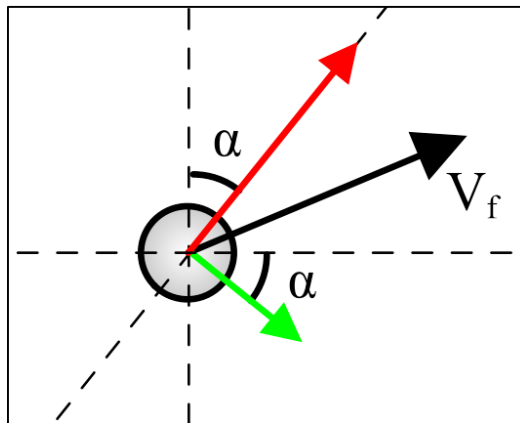
Dividindo numerador e denominador por m_B :

$$v_A = \frac{3 - \frac{m_A}{m_B}}{1 + \frac{m_A}{m_B}} v \cos \alpha$$

Como $m_A \ll m_B \Rightarrow \frac{m_A}{m_B} = 0$ e portanto:

$$v_A = 3v \cos \alpha$$

Dessa forma a bola menor é ejetada como representado na figura abaixo:



Cálculo da velocidade horizontal:

$$v_x = (v \sen \alpha) \cos \alpha + (3v \cos \alpha) \sen \alpha = 2v \sen 2\alpha$$

Cálculo da velocidade vertical:

$$v_y = (3v \cos \alpha) \cos \alpha - (v \sen \alpha) \sen \alpha = v(3 \cos^2 \alpha - \sen^2 \alpha)$$

Como as dimensões das esferas são desprezíveis considere o tempo de voo da esfera menor quando ela é lançada a partir do solo:

$$v_y - gt_V = -v_y \Rightarrow t_V = \frac{2v_y}{g}$$

$$t_V = \frac{2v}{g} (3 \cos^2 \alpha - \sen^2 \alpha)$$

Dessa maneira, a distância l percorrida na horizontal é dada por:

$$l = t_V v_x$$

$$l = \frac{4v^2}{g} (3 \cos^3 \alpha \sen \alpha - \sen^3 \alpha \cos \alpha)$$

$$l = \frac{4v^2}{g} (\sen 2\alpha + \sen 4\alpha)$$

Diferenciando o comprimento l com relação ao ângulo α e igualando a 0 à procura do ângulo $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ que maximize essa distância tem-se:

$$\frac{dl}{d\alpha} = \frac{4v^2}{g} (2 \cos 2\alpha + 4 \cos 4\alpha) = 0$$

$$\cos 2\alpha + 2 \cos 4\alpha = 0$$

$$\cos 2\alpha + 2(2 \cos^2 2\alpha - 1) = 0$$

$$4 \cos^2 2\alpha + \cos 2\alpha - 2 = 0$$

$$\cos 2\alpha = \frac{\sqrt{33} - 1}{8}$$

$$\text{sen } 2\alpha = \frac{\sqrt{2\sqrt{33} + 30}}{8}$$

$$\text{sen } 4\alpha = 2 \text{sen } 2\alpha \cos 2\alpha = \frac{1}{8} \sqrt{\frac{1}{2}(111 + \sqrt{33})}$$

Então:

$$l_{max} = \frac{v^2}{2g} \left(\sqrt{2\sqrt{33} + 30} + \sqrt{\frac{1}{2}(111 + \sqrt{33})} \right)$$

Como calculado inicialmente $v^2 = 2gh$ que ao ser substituído na expressão acima resulta em:

$$l_{max} = h \left(\sqrt{2\sqrt{33} + 30} + \sqrt{\frac{1}{2}(111 + \sqrt{33})} \right)$$

$$l_{max} = h \sqrt{\frac{3}{2}(69 + 11\sqrt{33})}$$

Segundo o enunciado do problema a altura vale $h = 2 \text{ m}$ assim, aproximadamente, o alcance torna-se:

$$l_{max} \cong 28,2 \text{ m}$$

